



Серия №24. Лемма (не) Бернсайда

14 июля

1. а) Сколькими способами можно раскрасить в три цвета клетки квадрата 5×5 ?
- б) Сколько способов, если раскраски, симметричные относительно вертикальной средней линии, считаются одинаковыми?
- в) Сколько способов, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом на угол, кратный 90° , считаются одинаковыми?
- г) Сколько способов, если и повороты, и симметрии отождествляют раскраски?

Определения. Пусть X – множество раскрасок «без условий», как в пункте а). Элементы множества X будем обозначать буквой x . Пусть G – множество преобразований, которые можно делать с x (например, повороты, перевороты и т.п.). Элементы G обозначим как f, g, h . По сути, мы можем находить $f(x), g(x), g(f(x)) \in X$ и т.п. В последнем случае преобразование называется композицией, и его можно обозначить $g \circ f$.

Множество G называют группой преобразований, если оно обладает свойствами:

- а) тождественное преобразование принадлежит G ;
- б) композиция преобразований из G принадлежит G ;
- в) для каждого $g \in G$ есть обратное преобразование $f = g^{-1}$, принадлежащее G ;
- г) выполняется ассоциативность: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Множество раскрасок $T_x = \{g(x) \in X | g \in G\}$ называется орбитой элемента x .

Множество преобразований $S_x = \{g \in G | g(x) = x\}$ называется стабилизатором элемента x .

2. а) Пусть $y \in T_x$. Докажите, что $T_y = T_x$.
- б) Выберем одну раскраску x . Докажите, что S_x является группой преобразований.
- в) Пусть множество S_x содержит k элементов g_1, g_2, \dots, g_k , и f – произвольное преобразование из G . Докажите, что $f \circ g_1(x) = f \circ g_2(x) = \dots = f \circ g_k(x)$.
- г) Докажите, что все $f \circ g_i$ являются разными элементами G , хоть и для элемента x выполнены равенства.
- д) Докажите, что если $f(x) = h(x)$, то множества вида $f \circ g_i$ и $h \circ g_i$ совпадают.
- е) Докажите, что $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$.
- ж) Пусть множество T_x содержит m элементов $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$. Докажите, что тогда $|G| = |S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_m}|$.
- з) Пусть X содержит n элементов, т.е. раскрасок «без условий». Пусть Y – множество раскрасок «с условиями», т.е. множество всех орбит в X . Докажите, что тогда выполняется равенство $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = |G| \cdot |Y|$.
- и) Пусть N_i , где $1 \leq i \leq |G|$ – это количество элементов X , переходящих в себя при преобразовании g_i . Докажите, что $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}$.

Лемма Бернсайда. Количество различных раскрасок (орбит) равно среднему арифметическому количеств раскрасок, не меняющихся при каждом преобразовании, т.е.

$$|Y| = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}}{|G|}$$

Задачи

3. Снова решите задачу 1.
4. Из проволоки согнули равносторонний треугольник. Его стороны могут быть окрашены в один из n цветов. Сколько существует движений, переводящих треугольник в себя? Сколько существует различных раскрасок?
5. а) Сколькими способами можно раскрасить бусы из p бусинок в a цветов с точностью до поворота? (p – простое)
б) Докажите малую теорему Ферма.
6. Сколько различных бус для 40 бусинок и a цветов с точностью до поворота?
7. Сколько различных бус можно составить из 10 красных и 4 синих бусин с точностью до поворота и переворота?
8. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в 3 цвета?
9. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 3 цвета?
10. Сколькими способами можно раскрасить ребра куба в 3 цвета?
11. Сколько различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник.